**משפט:**

אלג' אדמונס וקארפ רץ לכל היותר O(|V||E|) שלבים.

**ט"ע 1:**

כל צלע יכולה להיעלם לכל היותר O(|V|) פעמים.

**הוכחת המשפט:**

בכל שלב ישנה צלע אחת לפחות שמרוות (הצלע שמהווה את צוואר הבקבוק של המסלול) ונעלמת. מט"ע כל צלע נעלמת לכל היותר O(|V|) ולכן לאחר O(|V||E|) שלבים יסיים. מש"ל.

יהי את הרשת השיורית לאחר i אטרציות. ונסמן ב- את המרחק הקצר ביותר של v מ-s ב-.

**ט"ע 2**



**הוכחת ט"ע 2**



נסמן ב- גרף המורכב מאיחוד הקשתות של ו-. ונסמן עוד את את המרחק הקצר ביותר של v מ-s ב-.

כי כל הצלעות ב- ב- קיימות גם ב- . נשאר לנו להוכיח כי :

ואז מטרזיטיביות יחד עם (\*) נקבל את הטענה. יהי P המסלול הקצר ביותר בין s ל-v בגרף . טענה: כל הקשתות ב-P שייכות ל. לפי הטענה אז מתקיים הא"ש (\*\*).

אם בשלילה הטענה לא מתקיימת נסמן ב-(x,y) קשת ראשונה ב-P ששיכת לגרף .



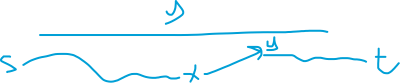
(x,y) לא שייכת ל- אך מופיעה ב- מכיוון שהאלג' הזרים בשלב ה-i על הקשת (y,x). האלג' מזרים במסלולים קצרים ביותר ולכן:

נסמן ואז .

אם נסמן ב- את הרישא של P מ-s עד x, כולו ב- ולכן:

ומכאן המסלול

ומכאן המסלול P אינו קצר ביותר כי נוכל לשרשר את המסלול המתאים ל יחד עם הסיפא של P ולקבל מסלול קצר ב-2. סתירה. ולכן בהכרח כל הקשתות של P הן מ-.



**ט"ע 1:**

כל צלע יכולה להיעלם לכל היותר O(|V|) פעמים.

**ט"ע 2 (המורחבת)**

**הוכחת ט"ע 1:**

נסמן את גרף בו צלע (x,y) נעלמת, אז כדיי ש(x,y) תופיע שוב צריך להזרים בגרף שיורי עתידי (j>i) זרימה בקשת (y,x).

בגרף בו הזרמנו בקשת (x,y) הקשת הייתה כחלק ממסלול קצר ביותר ולכן:

בצורה דומה בגרף בו הזרמנו בקשת (y,x) הקשת הייתה כחלק ממסלול קצר ביותר ולכן:

מהצבת השווינות וט"ע 2 נקבל:

ולכן:

קודקוד יכול להתרחק לכל היותר |V|-1 צלעות מ-s ולכן צלע תיעלם לכל היותר . שזה O(|V|).



**הוכחת משפט הול – כיוון אחד**

אנו נרצה להראות שאם לכל מתקיים אז יש שידוך מושלם בגרף.

נסמן |L|=|R|=n ונראה שיש שידוך מגודל n. מהמשפט שהראנו בשבוע שעבר (גודל זרימה מקסימלית שווה לגודל שידוך מקסימלי) מספיק להראות שיש זרימה מקסי' בגודל n.

ממשפט Min-Cut-Max-Flow מספיק להראות שהחתך המינמאלי הוא בגודל n .

חתך עם קיבולת n. יהי חתך כלשהו (S,T) נראה כי .

אם יש ב-(S,T) צלע חוצה חתך מ- מקיבולת n אז בוודאי שזה מתקיים. אז נניח כעת שאין כזו צלע חוצה חתך בחתך.

A picture containing sky, map, text

Description automatically generated

אז ישנם רק צלעות חוצות חתך:

* מ-s ל-
* מ- ל-t.

כולם בקיבולת 1. ולכן:

A close up of a map

Description automatically generated

עבור מתנאי המשפט ידוע ש:

*כאשר הא"ש האחרון נובע מכך שאנו יודעים שאין צלע חוצה חתך ממשקל n.*